1– مقدمه

اهداف درس:

آشنایی با مفاهیم پایه ای پردازش سیگنال

2– مبانی سیگنال ها و سیستم ها

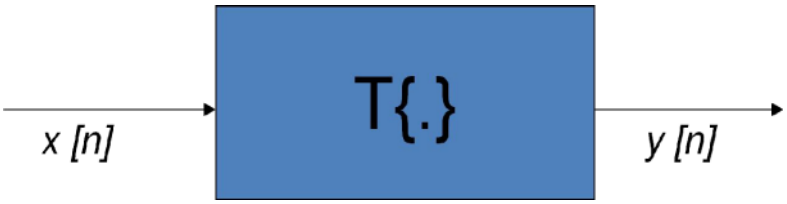
نمایش ریاضی سیگنال ها به صورت توابعی از یک یا چند متغییر مستقل می باشد.

پردازش سیگنال دیجیتال با تبدیل های سیگنال هایی که هم در زمان و هم در دامنه گسسته هستند سروکار دارد.

نمایش ریاضی سیگنال های زمان–گسسته به صورت دنباله ای از اعداد می باشد.

نمایش ریاضی یک سیستم زمان–گسسته به صورت یک تبدیل یا عملگر می باشد:

- *y[n] = T{ x[n] }*



تصویر 1 – یک سیستم زمان–گسسته

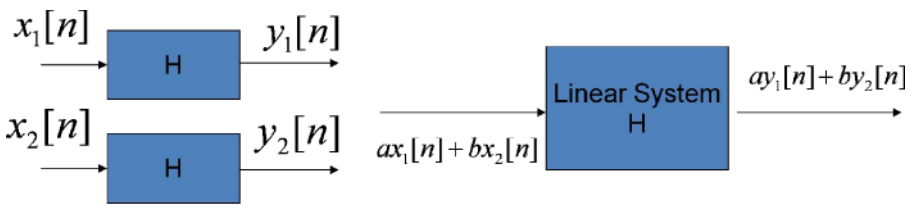
دسته «سیستم های خطی» بوسیله دو اصل زیر تعریف می شود:

- اصل جمع پذیری : $T\{x_1[n]+x_2[n]\}=T\{x_1[n]\}+T\{x_2[n]\}=y_1[n]+y_2[n]$
- اصل همگنی: (a یک مقدار ثابت است) $T\{ax[n]\}=aT\{x[n]\}=ay[n]$

دو اصل بالا را می توان در اصل superposition جمع کرد:

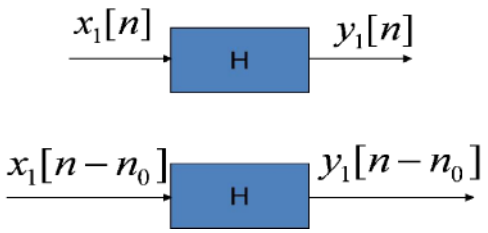
$$T\{ax_1[n]+bx_2[n]\}=aT\{x_1[n]\}+bT\{x_2[n]\}$$

به عبارتی اگر یک سیستم H داشته باشیم و دو بار مختلف ورودی های مختلف به آن بدهیم، اگر ورودی ها را ضرب در عدد ثابتی کرده و با هم جمع کنیم، خروجی هم ضرب در همان عدد ثابت و با هم جمع می شود (تصویر 2).



یک سیستم « نباله ورودی،

همان شیفت



تصویر 3 – سیستم تغییرناپذیر با زمان

یک دسته مهم سیستم ها، سیستم های «خطی و تغییرناپذیر با زمان» هستند (LTI).

سیستم های LTI را می توان کاملاً بوسیله پاسخ ضربه آن ها توصیف کرد:

$$y[n]=T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]\right\}$$

$$x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$$

- اصل superposition: سیگما و x[k] از داخل بیرون می آیند.

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]T\{\delta[n-k]\}$$

- اصل تغییرناپذیر بودن با زمان: پاسخ ضربه در هر زمانی یکسان است.

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

به فرمول به دست آمده فرمول کانولوشن گفته می شود:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

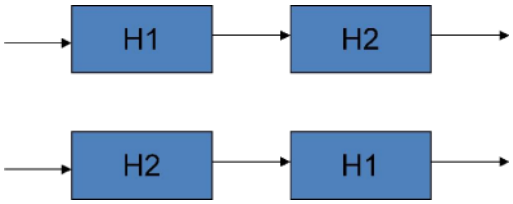
کانولوشن معمولاً به صورت روبرو نشان داده می شود:

کانولوشن دو سیگنال خواص زیر را دارد:

- جابجایی: $(h_1[n]*h_2[n])*h_3[n]=h_1[n]*(h_2[n]*h_3[n])$
- شرکت پذیری: $y[n]=x[n]*h[n]$
- پخشی: $h[n]*(ax_1[n]+bx_2[n])=a(h[n]*x_1[n])+b(h[n]*x_2[n])$
- معکوس زمان: $y[-n]=x[-n]*h[-n]$

- مستقل بودن از ترتیب: در صورتی که دو سیستم LTI پشت سر هم باشند، پاسخ ضربه کل سیستم برابر کانولوشن دو پاسخ ضربه می باشد. همچنین سیستم مستقل از ترتیب سیستم ها می باشد (تصویر 4).

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$



تصویر 4 –دو سیستم پشت سر هم LTI

یک ویژگی دیگر سیستم هاخاصیت پایدار (stable) بودن است:

یک سیستم پایدار است اگر یک ورودی کران دار (bounded) $|x[n]| < M$ یک خروجی کران دار تولید می کند.

یک سیستم LTI پایدار است اگر $\sum_k |h[k]| < \infty$

با توجه به اندازه طول پاسخ ضربه، سیستم ها به دو دسته زیر تقسیم می شوند:

- پاسخ ضربه با طول محدود (FIR): $y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \ldots + b_q x[n-q]$ که $h[n] = b_n$
- پاسخ ضربه با طول بینهایت (IIR)

تبدیل ها روش موثری برای ساده سازی تحلیل سیگنال ها و سیستم های خطی می باشند.

تبدیل های زیر را در نظر بگیرید:

- تبدیل خطی: $T[ax + by] = aT[x] + bT[y]$
- کانولوشن دو سیگنال به صورت زیر ساده می شود: $T[x * y] = T[x]T[y]$

بیشترین تبدیل های استفاده شده در مهندسی مخابرات عبارت است از:

- تبدیل لاپلاس (پیوسته در زمان و فرکانس)
- تبدیل فوریه پیوسته (پیوسته در زمان)
- تبدیل فوریه گسسته (گسسته در زمان)
- تبدیل z (گسسته در زمان و فرکانس)

3– **تبدیل** Z

تبدیل Z به صورت روبرو تعریف می شود:

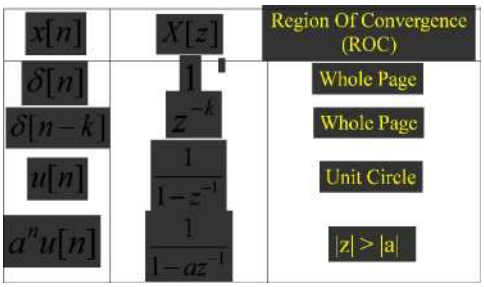
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

مبحث منطقه همگرایی (Region of Convergence یا ROC) خیلی در این تحلیل مهم است.

برخی توابع پایه و تبدیل Z آن ها عبارتند از:

- ضربه واحد: $x[n]=\delta[n]$ $\quad X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n]z^{-n}=1 \qquad ROC:\ z\neq 0$
- ضربه واحد با تاخیر: $x[n]=\delta[n-k]$ $\quad X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n-k]z^{-n}=z^{-k} \qquad ROC:\ z\neq 0$
- پله واحد: $u[n]=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$ $\quad X(z)=\sum_{n=-0}^{\infty}z^{-n}=\frac{1}{1-z^{-1}} \qquad ROC:\ z>1$
- نمایی: $x[n]=a^n u[n]$ $\quad X(z)=\sum_{n=-0}^{\infty}a^n z^{-n}=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad ROC:\ z>|a|$

در تصویر 5 این توابع مهم را مشاهده می کنید:



تصویر 5 – تبدیل z توابع مهم

ویژگی های مهم تبدیل Z عبارتند از:

- خطی بودن: $Z\{ax[n]+by[n]\}=aX(z)+bY(z)$
- کانولوشن: $w[n]=x[n]*y[n]\rightarrow W(z)=X(z)Y(z)$
- شیفت: $Z\{x[n-k]\}=z^{-k}X(z)$
- مشتق جلو: $\Delta x[n]=x[n+1]-x[n]$
- مشتق عقب: $\nabla x[n]=x[n]-x[n-1]$

چون $\Delta x[n]=x[n]*\left(\delta[n+1]-\delta[n]\right)$ از ویژگی شیفت نتیجه می شود:

$$Z\{\Delta x[n]\}=(z-1)X(z)$$
$$Z\{\nabla x[n]\}=(1-z^{-1})X(z)$$

تعریف منطقه همگرایی (ROC): ROC یک حلقه و یا صفحه دیسک مانند در صفحه z می باشد که روی مبدا واقع شده است.

تبدیل فوریه x[n] همگرا می شود (وجود دارد) فقط و فقط اگر ROC تبدیل z آن سیگنال شامل دایره واحد شود.

- ROC باید یک منطقه پیوسته باشد.

- اگر x[n] دنباله ای با طول محدود باشد، ROC تمام صفحه z می باشد (شاید به غیر از z=0 و z=∞)
- اگر x[n] دنباله سمت راستی باشد، ROC از بیرونی ترین قطب تا z=∞ ادامه خواهد داشت.
- اگر x[n] دنباله سمت چپی باشد، ROC از درونی ترین قطب تا z=0 ادامه خواهد داشت.
- یک دنباله دو سمتی یک دنباله تا بینهایت است که نه سمت چپی است و نه سمت راستی.
- اگر x[n] یک دنباله دو سمتی باشد، ROC شامل یک حلقه در صفحه z خواهد بود که بوسیله بیرونی ترین و درونی ترین قطب محدود خواهد بود.

دیدیم که برای یک سیستم LTI با پاسخ ضربه h[n]: $y[n]=x[n]*h[n]$

با خاصیت کانولوشن تبدیل Z: $Y(z)=X(z)H(z)$

4– تبدیل فوریه گسسته (Discrete Fourier Transform)

تبدیل فوریه را با توجه به پیوسته یا گسسته بودن زمان و فرکانس به چهار دسته تقسیم می کنند (تصویر 6).

Time	Frequency	Transform Type
Continuous	Continuous	Fourier Transform
Discrete	Continuous	Discrete Time Continuous FFT
Continuous	Discrete	Fourier Series
Discrete	Discrete	Discrete Time Discrete FFT

تصویر 6 – چهار دسته بندی تبدیل فوریه بر اساس پیوسته گسسته بودن زمان و فرکانس

تعریف تبدیل فوریه گسسته: $X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}$

معمولاً به جای z عبارت $W_N=e^{\frac{j2\pi}{N}}$ را می گذارند: $X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{-nk}$

معکوس تبدیل فوریه گسسته: $x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]W^{nk}$

توابع مهم و تبدیل فوریه آن ها:

- ضربه واحد: $x[n]=\delta[n]$ $\quad X[k]=1$
- ضربه واحد تاخیر دار: $x[n]=\delta[n-p]$ $\quad X[k]=W^{-kp}$
- ثابت: $x[n]=1$ $\quad X[k]=N\delta[k]$
- نمایی مختلط: $x[n]=e^{j\alpha n}$ $\quad X[k]=N\delta\left(k-\frac{N\alpha}{2\pi}\right)$

- کسینوس: $x[n]=\cos 2\pi f_0 n$ $\quad X[k]=\frac{N}{2}\left(\delta[k-Nf_0]+\delta[N-k+Nf_0]\right)$

ویژگی های DFT عبارتند از:

- تقارن: اگر $f[n]\leftrightarrow F[k]$ آنگاه $f[k]\leftrightarrow NF[-n]$
- خطی بودن: اگر $x[n]\leftrightarrow X[k]$ و $y[n]\leftrightarrow Y[k]$ آنگاه $ax[n]+by[n]\leftrightarrow aX[k]+bY[k]$
- شیفت: چون DFT ذاتاً فرض پریودیک بودن می کند، شیفت مانند چرخش است.

  اگر $x[n]\leftrightarrow X[k]$ آنگاه $x[n-p]\leftrightarrow W^{-kp}X[k]$
- معکوس زمان: اگر $x[n]\leftrightarrow X[k]$ آنگاه $x[-n]\leftrightarrow X[-k]$
- کانولوشن چرخشی: کانولوشن یک عملیان شیفت، ضرب و جمع است. چون همه شیفت های DFT چرخشی است، کانولوشن DFT این شیفت ها را هم در نظر می گیرد. $x[n]*y[n]=\sum_{p=0}^{N-1}x[p]y[n-p]$

5 – خلاصه و نتیجه گیری

در این فصل با چند معیار فاصله آشنا شدیم.

6 – منابع درس

1- Rabiner, “Fundumentals of Speech Recognition”
2- Huang, Acero, “Spoken Language Processing”
3- Deller, “Discrete-time processing of speech signals”